



**Zadania na XXII Podkarpacki Konkurs Matematyczny  
im. Franciszka Lejona  
Poziom III**

(klasy trzecie liceum i technikum)

Etap powiatowy

4 lutego 2023 r. godzina 10.00

(150 minut)

1. Znajdź wszystkie wartości parametru  $m$ , dla którego zachodzi warunek: liczba pierwsza jest pierwiastkiem trójmianu kwadratowego  $x^2 - 10x + m^2 = 0$ .
2. Wykaż, że dla dowolnego trójkąta prawdziwa jest nierówność:  $4P_{\Delta} < p^2$ , gdzie  $p$  oznacza połowę obwodu trójkąta.
3. Rozwiąż układ równań w zbiorze liczb rzeczywistych :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ xy + yz + xz = -1 \\ x^3 + 2xy + y^3 = 2x^2 + 2y^2 \end{cases}.$$
4. W prostokąt wpisano dwa okręgi o równych promieniach styczne zewnętrznie do siebie oraz styczne każdy do trzech boków prostokąta. Przy dłuższych bokach prostokąta wpisano jeszcze dwa mniejsze okręgi o równych promieniach styczne do większych okręgów oraz do dłuższych boków prostokąta. Środki czterech okręgów utworzyły czworokąt. Oblicz stosunek pola powstałego czworokąta do pola prostokąta.
5. Udowodnij, że jeżeli liczby  $a$ ,  $b$  oraz  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  są wymierne to liczby  $\sqrt{a}$  i  $\sqrt{b}$  też są wymierne.

Powodzenia!